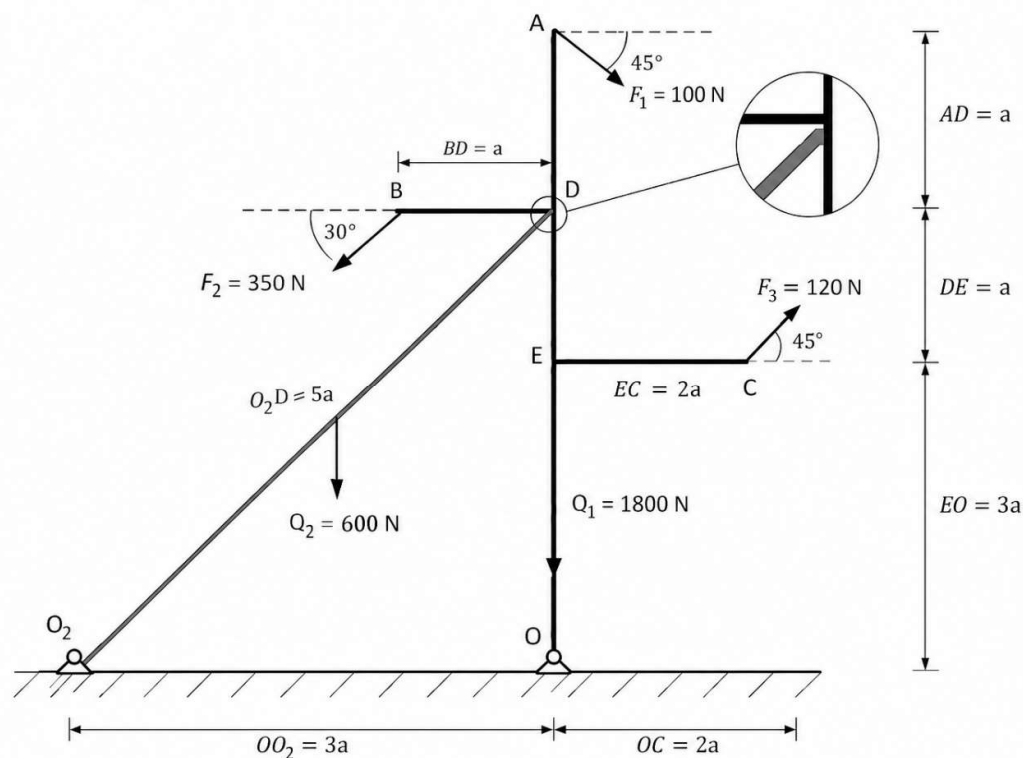


MEHANIKA

1. Na slici je prikazan sistem sastavljen od dva homogena čelična stuba u vertikalnoj ravni. Vertikalni elektroenergetski stub OA oslonjen je zglobno u tački O . Kosi stub O_2D oslonjen je zglobom u tački O_2 , dok se njegov gornji kraj u tački D oslanja na hrapavu vertikalnu površinu stuba OA . Koeficijent statičkog trenja između stubova iznosi $\mu = 0,25$. Na vertikalni stub deluju tri spoljašnje sile F_1 , F_2 i F_3 , čiji su pravci i smerovi prikazani na slici. Odrediti:

- Horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije nepokretnog zgloba u tački O : X_O , Y_O .
- Horizontalnu i vertikalnu komponentu reakcije nepokretnog zgloba u tački O_2 : X_{O_2} , Y_{O_2} .
- Normalnu silu i silu trenja u tački dodira D : N_D , T_D . Ucrtati smer i pravac ovih sila na crtežu.



2. Aluminijumsko uže je vezano za fiksne tačke A i B koje se nalaze u istoj horizontalnoj ravni na visini $H=10 \text{ m}$ iznad površine zemlje. Rastojanje između tačaka vešanja je $\overline{AB}=200 \text{ m}$. Uže je zategnuto tako da pri temperaturi montaže $t_m=20^\circ\text{C}$ njegov maksimalni ugib iznosi $f_m=3,5 \text{ m}$. Minimalna očekivana temperatura užeta je $t_{\min}=-10^\circ\text{C}$, a maksimalna $t_{\max}=70^\circ\text{C}$.

- Proračunati minimalno rastojanje provodnika od zemlje koje se može javiti u navedenom opsegu temperatura užeta. Pretpostaviti da je teren iznad kojeg se prostire vod ravan.
- Ako se zbog dugotrajnog zatezanja užeta očekuje efekat puzanja materijala, usled čega se njegova prirodna dužina poveća za 20 cm , proračunati minimalno rastojanje provodnika od zemlje uvažavajući ovaj efekat.

Parametri užeta su:

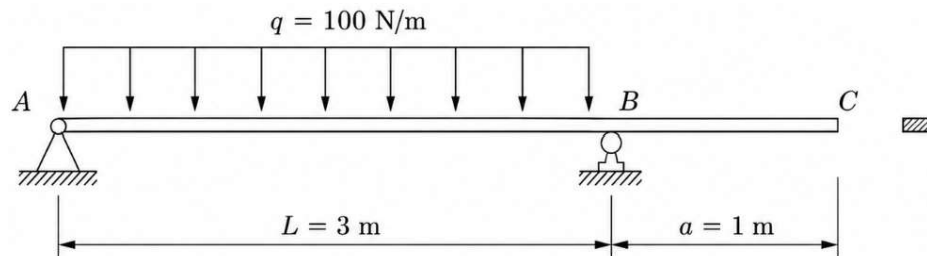
$$A = 50 \text{ mm}^2; \sigma_d = 7 \cdot 10^7 \text{ Pa}; \gamma = 2,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}^3; E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Pa}; \alpha = 22 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}.$$

3. Laka homogena prava greda AC , pravougaonog poprečnog preseka dimenzija $b = 10\text{ cm}$ i $h = 5\text{ cm}$, oslonjena je u tačkama A i B . Rastojanja su $AB = L = 3\text{ m}$ i $BC = a = 1\text{ m}$. Na delu AB nalazi se ravnomerno raspodeljen teret intenziteta $q = 100\text{ N/m}$, dok je prepust BC neopterećen.

U prvom položaju stranica b paralelna je horizontalnoj ravni, a izmereni otklon slobodnog kraja C iznosi $f_{C,1} = 12\text{ mm}$ nagore. Greda se zatim rotira za 90° oko svoje podužne ose, tako da stranica h postane paralelna horizontalnoj ravni.

a) Odrediti otklon slobodnog kraja C nakon rotiranja grede.

b) Odrediti maksimalni mehanički napon usled savijanja u oba analizirana položaja i navesti mesto na kojem se javlja maksimalni zatezni napon.



Napomena: Ispit traje 3 sata. Studenti koji su položili kolokvijum rade zadatak 3 i jedan od preostala dva zadatka po izboru. Ostali studenti rade sve zadatke. Potrebno je na svakom zadatku ostvariti minimalno 30% poena i zbirno minimalno 50% ukupnog broja poena.

Mehanika – Rešenja zadataka

Zadatak 1

1. Postavka

Koordinatni početak u O, osa x udesno, osa y navise, momenti pozitivni u smeru suprotnom od kazaljke na satu.

O(0, 0), E(0, 3a), D(0, 4a), A(0, 5a), B(-a, 4a), C(2a, 3a), O₂(-3a, 0)

Komponente spoljašnjih sila:

$$\mathbf{F}_1 = (70,71 ; -70,71) \text{ N} \quad \mathbf{F}_2 = (-303,11 ; -175) \text{ N} \quad \mathbf{F}_3 = (84,85 ; 84,85) \text{ N}$$

U tački D dodirna površina je vertikalna, pa je normalna sila N_D horizontalna, a sila trenja T_D vertikalna.

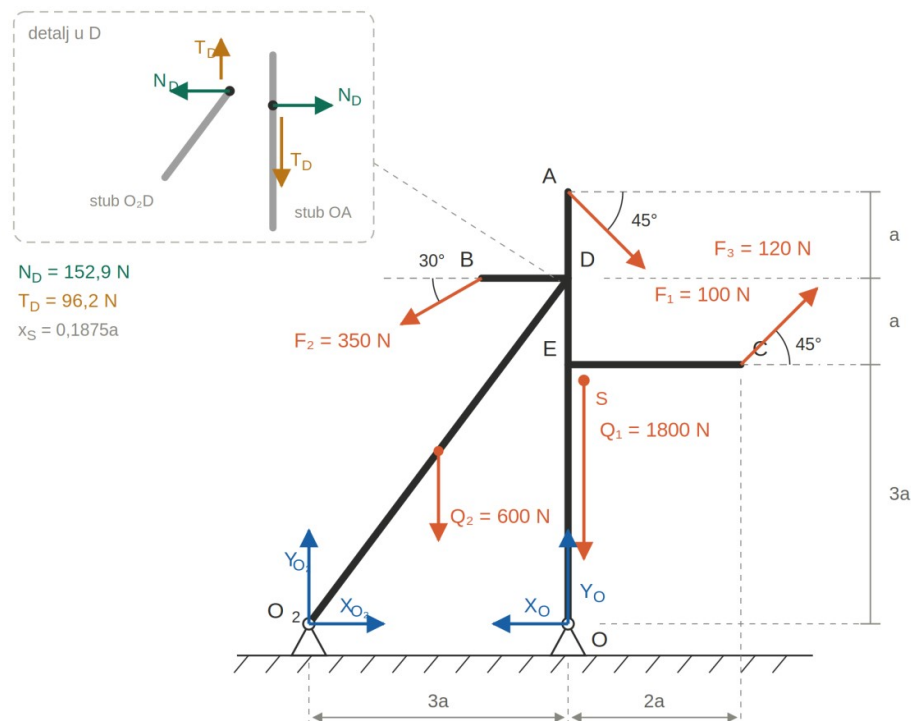
2. Težište vertikalnog stuba sa konzolama

Telo je homogeno, ukupne dužine 5a + a + 2a = 8a, pa se težina Q₁ = 1800 N deli srazmerno dužinama delova:

Deo	Dužina	Težina	x _i	y _i
OA (vertikalni)	5a	1125 N	0	2,5a
BD (leva konzola)	a	225 N	-0,5a	4a
EC (desna konzola)	2a	450 N	+a	3a
Ukupno	8a	1800 N	0,1875a	2,8125a

$$x_S = [1125 \cdot 0 + 225 \cdot (-0,5a) + 450 \cdot a] / 1800 = 0,1875a = 3a/16$$

Težište je pomerenom udesno jer je desna konzola duplo duža od leve. Zato napadna linija sile Q₁ ne prolazi kroz O i daje moment u odnosu na taj zglob. (Koordinata y_S = 2,8125a nije potrebna, jer je Q₁ vertikalna sila.)



Slika 1. Sistem sa svim opterećenjima i reakcijama. Crveno — zadata opterećenja, plavo — reakcije u stvarnim smerovima; detalj u D prikazuje normalnu silu i silu trenja na oba stuba.

3. Normalna sila u tački D

Momentna jednačina za vertikalni stub u odnosu na O. Napomena: N_D i T_D deluju u tački D koja leži na osi stuba, pa sila trenja nema krak u odnosu na zglob O — zato se N_D dobija direktno.

$$\Sigma M_O = -5a \cdot 70,71 + [a \cdot 175 + 4a \cdot 303,11] + [2a \cdot 84,85 - 3a \cdot 84,85] - 1800 \cdot 0,1875a - 4a \cdot N_D = 0$$

$$611,53a = 4a \cdot N_D \quad \square \quad N_D = 152,88 \text{ N}$$

4. Sila trenja u tački D

Momentna jednačina za kosi stub O_2D u odnosu na O_2 (težina $Q_2 = 600 \text{ N}$ deluje u sredini stuba, u tački $(-1,5a ; 2a)$):

$$\Sigma M_{O_2} = -1,5a \cdot 600 + 3a \cdot T_D + 4a \cdot N_D = 0$$

$$3 \cdot T_D = 900 - 611,53 \quad \Rightarrow \quad T_D = 96,16 \text{ N}$$

Pozitivan znak znači: na kosi stub trenje deluje naviše, a na vertikalni stub naniže.

5. Provera uslova trenja

$$T_{\max} = \mu \cdot N_D = 0,25 \cdot 152,88 = 38,22 \text{ N} < T_D = 96,16 \text{ N}$$

Uslov $T_D \leq \mu N_D$ NIJE zadovoljen. Sa zadatim koeficijentom $\mu = 0,25$ sistem ne bi ostao u ravnoteži — kosi stub bi kliznuo naniže u tački D. Za ravnotežu bi bilo potrebno $\mu \geq 96,16 / 152,88 = 0,63$.

6. Reakcije veza

Vertikalni stub OA (u D na njega deluju N_D udesno i T_D naniže):

$$X_O = -(70,71 - 303,11 + 84,85 + 152,88) = -5,34 \text{ N}$$

$$Y_O = -(-70,71 - 175 + 84,85 - 1800 - 96,16) = 2057,01 \text{ N}$$

Kosi stub O_2D (u D na njega deluju N_D ulevo i T_D naviše):

$$X_{O_2} = N_D = 152,88 \text{ N} \quad Y_{O_2} = 600 - 96,16 = 503,84 \text{ N}$$

7. Rezultati

Veličina	Intenzitet	Stvarni smer
X_O	5,34 N	ulevo (računski -5,34 N)
Y_O	2057,01 N	naviše
X_{O_2}	152,88 N	udesno
Y_{O_2}	503,84 N	naviše
N_D	152,88 N	na stub OA udesno
T_D	96,16 N	na stub OA naniže

Zadatak 2

a) Naprezanje u provodniku na temperaturi montaže je:

$$\sigma_m = \frac{\gamma^2}{2f_m} = \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 100^2}{2 \cdot 3,5} = 4 \cdot 10^7 \text{ Pa}.$$

Jednačina stanja provodnika je:

$$f^3 - f \frac{3}{2} l^2 \left[\frac{\gamma^2 l^2}{6\sigma_m^2} + \alpha(t - t_m) - \frac{\sigma_0}{E} \right] - \frac{3}{4} \frac{\gamma^4}{E} = 0.$$

Referentno stanje:

$$t_0 = t_m = 20^\circ\text{C}, \sigma_0 = \sigma_m = 4 \cdot 10^7 \text{ Pa}.$$

Maksimalni ugib provodnika se javlja na temperaturi $t_{\max} = 70^\circ\text{C}$. Prije efekta izduženja provodnika usled puzanja materijala maksimalni ugib iznosi:

$$f^3 - 20,18f - 30 = 0$$

$$f_{\max} = 5,105 \text{ m}$$

Pri ovoj temperaturi naprezanje u provodniku je minimalno:

$$\sigma_{\min} = \frac{\gamma^2}{2f_{\max}} = \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 100^2}{2 \cdot 5,105} = 2,74 \cdot 10^7 \text{ Pa}.$$

Minimalno rastojanje provodnika od zemlje u analiziranim uslovima:

$$d_{\min} = D - f_{\max} = 10 - 5,105 = 4,895 \text{ m}$$

b) Dužina nezategnutog provodnika u analiziranom rasponu pri temperaturi $t_{\max} = 70^\circ\text{C}$ neposredno prije montaže:

$$f_m^3 - \frac{3}{4} l (2L_0 - 2l) f_m - \frac{3}{4} \frac{\gamma^4}{E} = 0$$

$$2L_{0\max} = \frac{f_{\max}^3 - \frac{3}{4} \frac{\gamma^4}{E}}{\frac{3}{4} l \cdot f_{\max}} + 2l = \frac{5,105^3 - \frac{3}{4} \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 100^4}{7 \cdot 10^{10}}}{\frac{3}{4} 100 \cdot 5,105} + 200 = 200,2691 \text{ m}$$

Dužina nezategnutog provodnika u analiziranom rasponu pri temperaturi $t_{\max} = 70^\circ\text{C}$ nakon efekta izduženja usled puzanja materijala:

$$2L'_{0\max} = 2L_{0\max} + \Delta 2L = 200,804 + 0,2 = 200,4691 \text{ m}$$

Maksimalni ugib provodnika se javlja na temperaturi $t_{\max} = 70^\circ\text{C}$. Nakon efekta izduženja užeta zbog puzanja materijala maksimalni ugib iznosi:

$$f^3 - \frac{3}{4} l (2L'_{0\max} - 2l) f - \frac{3}{4} \frac{\gamma^4}{E} = 0$$

$$f^3 - 35,18f - 30 = 0 \Rightarrow f'_{\max} = 6,32 \text{ m}$$

Naprezanje u provodniku u analiziranim uslovima je:

$$\sigma = \frac{\gamma l^2}{2f} = \frac{2,8 \cdot 10^4 \cdot 100^2}{2 \cdot 6,32} = 2,22 \cdot 10^7 \text{ Pa}$$

Minimalno rastojanje provodnika od zemlje u analiziranim uslovima:

$$d'_{\min} = D - f'_{\max} = 10 - 6,32 = 3,68 \text{ m}$$

Zadatak 3

- a) Kako se nije promenilo opterećenje, već aksijalni moment inercije preseka, otklon će biti srazmeran:

$$u_C \sim \frac{1}{B} = \frac{1}{EI_x} \Rightarrow \frac{u_{C2}}{u_{C1}} = \frac{I_{x1}}{I_{x2}}$$

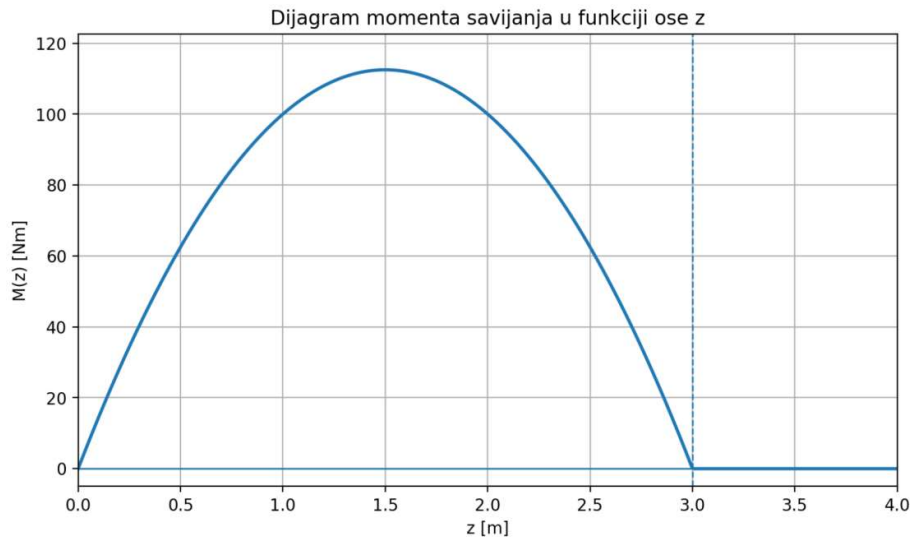
$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} \quad ; \quad I_{x2} = \frac{hb^3}{12}$$

$$u_{C2} = u_{C1} \frac{I_{x1}}{I_{x2}} = u_{C1} \frac{h^2}{b^2} = u_{C1} \frac{5^2}{10^2} = \frac{u_{C1}}{4} = \boxed{3 \text{ mm}} \text{ nagore}$$

- b)

$$R_A = R_B = \frac{qL}{2} = 150 \text{ N}$$

$$M(z) = R_A z - \frac{qz^2}{2} \Big|_L + R_B (z-L) + \frac{q(z-L)^2}{2}$$



Maksimalni moment se javlja na delu grede sa dodatnim opterećenjem:

$$\frac{dM}{dz} = 0 = \frac{qL}{2} - qz \Rightarrow \boxed{z^* = \frac{L}{2}}$$

$$M_{\max} = M(z = z^*) = \frac{qL^2}{8} = 112,5 \text{ Nm}$$

$$W_1 = \frac{bh^2}{6} = 4,167 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \Rightarrow \sigma_{\max 1} = \frac{M_{\max}}{W_1} = 2,70 \text{ MPa}$$

$$W_2 = \frac{hb^2}{6} = 8,333 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \Rightarrow \sigma_{\max 2} = \frac{M_{\max}}{W_2} = 1,35 \text{ MPa}$$

Zaključak: Postavljanjem veće stranice b vertikalno, ugib se smanjuje $(b/h)^2$ puta, dok se maksimalno naprezanje smanjuje b/h puta.